SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2000-2001

Ermanno Lanconelli

IL PRINCIPIO DEL MASSIMO PER I LAPLACIANI SUBELLITTICI SU APERTI NON LIMITATI

23 gennaio 2001

Tecnoprint - Bologna 2001

Riassunto. Si presentano alcuni principi di massimo su dominii non limitati per i Laplaciani sub–ellittici. Le tecniche usate sono tratte dalla teoria del potenziale.

English summary The Maximum Principle on a wide class of unbounded domains is proved for solutions to the partial differential inequality $\Delta_{\mathbb{G}} u + cu \geq 0$, where $c \leq 0$ and $\Delta_{\mathbb{G}}$ is a real sub-Laplacian. A Potential Theory approach is followed.

1 Main results

In recent years, much attention has been paid to the Maximum Principle on unbounded domains for solutions to the PDE inequality

$$\Delta u + cu \geq 0, \tag{1.1}$$

where Δ is the Laplace operator in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, and c is a real non-positive function. As it is well known, such a Principle plays a crucial rle in looking for symmetry properties of solutions to semilinear Poisson equations, by using moving planes or sliding methods. In those settings, one of the most commonly used Maximum Principle can be stated as follows.

(MP) *Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ be an open set whose complementary $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ contains an infinite open cone. Consider a bounded-above function $u \in C^2(\Omega)$ satisfying inequality* (1.1) *in Ω, and the boundary condition*

$$\limsup_{\Omega \ni y \to x} u(y) \leq 0, \quad \textit{for every } x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Then $u(x) \leq 0$ for every $x \in \Omega$.

This rather classical result can be easily derived from a 1947 Theorem by J. Deny, related to the behaviour at infinity of the bounded-above subharmonic functions in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. The extension of such an argument to the general setting of the real sub-Laplacians in $\mathbb{R}^N$ is the aim of these notes.

Our starting point is a representation formula for bounded above subharmonic functions related to a sub-Laplacian. We prove that the maximum principle for a sub-Laplacian holds in an open set Ω iff $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ is not *thin at infinity*. Then we prove that a set definetely containing a non-empty open $\mathbb{G}$-cone is not thin at infinity.As a conseguence, we are able to prove that any half-space is not thin at infinity. From this results we deduce our Maximum Principles.

Il Principio del Massimo per i Laplaciani subellittici su aperti non limitati

E. Lanconelli

Risultati ottenuti in collaborazione con A. Bonfiglioli

1 Introduzione

Lo studio delle proprietà qualitative delle soluzioni delle equazioni di Poisson semilineari su domini limitati e non limitati di $\mathbb{R}^N$ aventi particolari proprietà di simmetria, ha conosciuto un notevole sviluppo dopo i lavori di Serrin [S] e di Gidas, Ni e Nirenberg [GNN]. Notevoli contributi a questo argomento sono stati dati da Berestycki e Nirenberg mediante la tecnica degli *iperpiani mobili* di Alexandrov-Serrin e con il metodo dello *scivolamento* da loro stessi introdotto (si veda [BN]; si veda anche [BCN], e le note citate in bibliografia, ove il metodo dello scivolamento viene usato sistematicamente).

Queste tecniche si basano entrambe su opportune versioni del Principio del Massimo, la più usata delle quali è la seguente.

(PM) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, limitata superiormente e tale che

$$\begin{cases} \Delta u + c\,u \geq 0 \text{ in } \Omega, \\ \limsup_{x\to y} u(x) \leq 0 \text{ per ogni } y \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

ove c è una funzione ≤ 0 in Ω. Allora, se $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ contiene un cono aperto non limitato, $u \leq 0$ in Ω.

Questo teorema generalizza il classico Principio del Massimo su aperti limitati in quanto questi verificano banalmente la proprietà del cono infinito esterno. Inoltre, sempre nel caso dei domini limitati, in **(PM)** l'ipotesi di limitatezza superiore di u può venire omessa in quanto conseguenza della condizione al bordo in (1).

Il Teorema **(PM)** viene dimostrato in [BCN] mediante una tecnica di confronto con funzioni armoniche in coni, positive all'interno, nulle sul bordo e divergenti positivamente su ogni raggio interno ([BCN, Lemma 2.1]).

Una più semplice e diretta dimostrazione di **(PM)** si può dare utilizzando due risultati tratti dalla teoria classica del potenziale: (i) il Teorema di Riesz sulla rappresentazione delle funzioni subarmoniche superiormente limitate; (ii) un Teorema di Deny sull'andamento all'infinito dei potenziali newtoniani.

Il ragionamento è il seguente. Sia u una funzione di classe C^2, superiormente limitata e verificante (1). Allora la funzione

$$v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, v(x) = \begin{cases} \max\{u,0\} & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

è subarmonica e superiormente limitata. Per il Teorema di Riesz, esiste una misura di Radon μ tale che

$$v(x) = V - \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)\, d\mu(y) \equiv V - \Gamma_\mu(x) \tag{2}$$

ove $V = \sup_{\mathbb{R}^N} v$ e Γ denota la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace. Ora, per il Teorema di Deny ([D, p. 142])

$$\Gamma_\mu(rx) \longrightarrow 0 \text{ per } r \to \infty \tag{3}$$

per quasi ogni $x \in S^{N-1}$ (la sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$). In particolare, poichè $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ contiene un cono aperto e non limitato K, la (3) vale per quasi ogni $x \in S^{N-1} \cap K$. Di conseguenza, per (2), $v(x) \to V$ per $x \to \infty$ su quasi ogni raggio contenuto in K. Ma $v \equiv 0$ in K, quindi $V = 0$, onde $v \leq 0$. Lo stesso vale per u perchè $u \leq v$.

La tecnica degli iperpiani mobili e il metodo dello scivolamento sono stati estesi da Birindelli e Prajapat al più generale contesto dei Laplaciani subellittici $\Delta_{\mathbb{G}}$, ove $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ è un gruppo di Lie omogeneo [BP 1, BP 2]. Questa estensione si è resa possibile per l'invarianza di $\Delta_{\mathbb{G}}$ rispetto alle traslazioni a sinistra e alle dilatazioni naturali su $\mathbb{G}$.

Meno semplice si presenta l'estensione del metodo delle barriere sui coni per dimostrare Principi del Massimo su aperti non limitati. Con questa tecnica, in una nota recentissima [BP 3], Birindelli e Prajapat hanno ottenuto Principi di massimo sui semispazi di $\mathbb{R}^{2n+1}$ per $\Delta_{\mathbb{H}_n}$, il Laplaciano subellittico sul gruppo di Heisenberg. Tuttavia, la loro costruzione delle funzioni barriera è molto sofisticata e non sembra facilmente adattabile a tutti i sub-Laplaciani.

La dimostrazione proposta più sopra e basata su Teoremi di tipo Riesz e Deny, si estende invece in modo naturale, come vedremo nei paragrafi successivi.

I risultati che esporremo sono contenuti in [BL 2].

2 Notazioni e richiami

L'operatore differenziale del secondo ordine $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{k=1}^{p} X_k^2$ è un *sub-Laplaciano reale* in $\mathbb{R}^N$ se X_k è un operatore differenziale del primo ordine con coefficienti C^∞, invariante per le traslazioni a sinistra su un gruppo omogeneo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ)$ la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è nilpotente, stratificata e ovunque N-dimensionale. Inoltre, se $\bigoplus_{k=1}^{\nu} \mathfrak{g}_k$ è la stratificazione di $\mathfrak{g}$, allora $\{X_1, \dots, X_p\}$ è una base di $\mathfrak{g}_1$.

Denotiamo con $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ le dilatazioni di $\mathbb{G}$, così definite

$$(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\nu)}) \mapsto \delta_\lambda(x) := (\lambda\, x^{(1)}, \lambda^2\, x^{(2)} \dots, \lambda^\nu\, x^{(\nu)}),$$

dove $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{N_j}$, e N_j sono interi positivi tali che $N_1 = p$ e $\sum_{k=1}^{\nu} N_k = N$. Il numero naturale $Q := \sum_{k=1}^{\nu} k\, N_k$ è chiamato *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$. Esiste una norma omogenea $|\cdot|$ su $\mathbb{G}$ tale che $\Gamma(x,\xi) = c_Q\, |x^{-1} \circ \xi|^{2-Q}$ è una soluzione fondamentale di $\Delta_{\mathbb{G}}$ (c_Q è una opportuna costante positiva [G]). Quindi, $\Gamma(x,\xi)$ è di classe C^∞ per $x \neq \xi$, e $\Delta_{\mathbb{G}}$ è ipoellittico. Scriveremo anche $d(\cdot)$ invece di $|\cdot|$. La misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$ è invariante rispetto alle traslazioni a destra e a sinistra di $\mathbb{G}$. Indichiamo con $D(0,r)$ il disco di centro x e raggio r nella metrica d.

Poichè $\Delta_{\mathbb{G}}$ è ipoellittico, possiamo chiamare $\Delta_{\mathbb{G}}$*-armonica* in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ogni funzione u di $C^\infty(\Omega)$ tale che $\Delta_{\mathbb{G}} u = 0$ in Ω. Una funzione $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ sarà chiamata $\Delta_{\mathbb{G}}$*-subarmonica* se u è superiormente semicontinua, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $\Delta_{\mathbb{G}} u \geq 0$ nel senso delle distribuzioni.

Se μ è una misura di Radon in $\mathbb{R}^N$, denotiamo con Γ_μ il Γ-potenziale di μ:

$$\Gamma_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y^{-1} \circ x)\, d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

3 Principio del Massimo e sottigliezza all'infinito

La nozione di insieme sottile in un punto, introdotta da Brelot nella teoria classica del potenziale, è stata ampiamente studiata anche in ambito astratto.

Su questa nozione è modellata la seguente definizione di insieme non sottile all'infinito.

Definizione 3.1 *Diremo che* $F \subseteq \mathbb{R}^N$ è non sottile all'infinito *per* $\Delta_{\mathbb{G}}$ *se*

$$\limsup_{d(x)\to\infty,\ x\in\mathbb{R}^N} u(x) = \limsup_{d(x)\to\infty,\ x\in F} u(x) \tag{4}$$

per ogni funzione u *superiormente limitata e* $\Delta_{\mathbb{G}}$*-subarmonica in* $\mathbb{R}^N$ *([CC]).*

Poichè le funzioni $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmoniche non hanno punti di massimo locale (se non sono costanti), la condizione (4) è equivalente alla seguente

$$\sup_{\mathbb{R}^N} u = \sup_F u. \tag{5}$$

Questa osservazione consente di collegare la nozione di sottigliezza all'infinito col Principio del Massimo. Anzitutto, conveniamo di dire che il Principio del Massimo vale per $\Delta_{\mathbb{G}}$ in Ω, se vale la seguente affermazione:

Se $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ *è una funzione* $\Delta_{\mathbb{G}}$*-subarmonica superiormente limitata e tale che*

$$\limsup_{\Omega\ni y\to x} u(y) \le 0\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,,$$

allora $u \le 0$ *in* Ω.

Abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 3.2 *Il Principio del Massimo per* $\Delta_{\mathbb{G}}$ *vale nell'aperto* Ω *se e solo se* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ *non è sottile all'infinito per* $\Delta_{\mathbb{G}}$.

Dimostrazione. Supponiamo che il Principio del Massimo per $\Delta_{\mathbb{G}}$ valga in Ω. Sia u una funzione $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica e limitata superiormante in $\mathbb{R}^N$. Definiamo $C := \sup_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} u$ e $v := u - C$. Allora, v è $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica e superiormente limitata in Ω; inoltre

$$\limsup_{\Omega\ni y\to x} v(y) \le v(x) \le 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Quindi, per il Principio del Massimo, $v \le 0$ in Ω e (5) segue. Questo dimostra che $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ non è sottile all'infinito. Viceversa, sia u una funzione $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica in Ω, limitata superiormente e tale che $\limsup_{y\to x} u(y) \le 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Allora, la funzione

$$v := \begin{cases} \max\{u, 0\} & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

è $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica e limitata superiormente in $\mathbb{R}^N$. Poichè $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ non è sottile all'infinito risulta

$$\sup_{\mathbb{R}^N} v = \sup_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} v\,, \tag{6}$$

e quindi, essendo $v = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, $v \leq 0$ in $\mathbb{R}^N$. In particolare $u \leq 0$ in Ω, e il Principio del Massimo è dimostrato. $\square$

4 Criteri geometrici di sottigliezza all'infinito

In una nota recente con A. Bonfiglioli [BL 1] abbiamo dimostrato il teorema seguente, che estende ai sub-Laplaciani un risultato di rappresentazione delle funzioni superarmoniche e superiormente limitate su tutto lo spazio.

Teorema 4.1 *Sia u una funzione $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica in $\mathbb{R}^N$ avente estremo superiore $U < \infty$. Allora esiste una misura di Radon μ in $\mathbb{R}^N$ tale che*

$$u(x) = U - \Gamma_\mu(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N\,. \tag{7}$$

Inoltre, se $n(t) := \mu(D(0,t))$, risulta

$$\int_1^\infty \frac{n(t)}{t^{Q-1}}\,\mathrm{d}t < \infty\,. \tag{8}$$

Da questo teorema, con un procedimento in tutto analogo a quello utilizzato per il Laplaciano classico in [HK, pp. 131-134], abbiamo ottenuto il seguente risultato, che estende ai sub-Laplaciani una particolare versione del Teorema di Deny richiamato nell'Introduzione, dovuta a Cartan.

Teorema 4.2 *Sia $u : \mathbb{R}^N \to [-\infty, \infty[$ una funzione $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica e limitata. Allora, per ogni $q > Q - 2$, esiste una famiglia finita o numerabile di d-dischi chiusi $\{\overline{D}(x_j, r_j)\}_{j \in J}$ tale che*

(i) $\displaystyle\sum_{j\in J} \left(\frac{r_j}{d(x_j)}\right)^q < \infty\,;$

(ii) posto $\mathcal{D} := \bigcup_{j\in J} \overline{D}_j$,

$$\lim_{d(x)\to\infty,\ x\notin\mathcal{D}} u(x) = \sup_{\mathbb{R}^N} u\,. \tag{9}$$

In particolare,

$$\limsup_{d(x)\to\infty,\, x\in\mathbb{R}^N} u(x) = \limsup_{d(x)\to\infty,\, x\in F} u(x)$$

per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^N$ che sia di tipo Cartan per $\Delta_{\mathbb{G}}$.

Conveniamo di chiamare *insieme di Cartan* per $\Delta_{\mathbb{G}}$ ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ che non possa essere ricoperto con un numero finito o con una infinità numerabile di d-dischi chiusi $\overline{D}(x_j, r_j)$ verificanti (i) per qualche $q > Q-2$.

Dalla seconda parte di questo teorema segue immediatamente che *ogni insieme di tipo Cartan per $\Delta_{\mathbb{G}}$ non è sottile all'infinito per $\Delta_{\mathbb{G}}$.*

Esempi espliciti di insiemi di tipo Cartan sono i $\mathbb{G}$-coni. Chiamiamo *$\mathbb{G}$-cono con vertice nell'origine* ogni sottoinsieme aperto K di $\mathbb{R}^N$ tale che

$$\delta_\lambda \xi \in K, \qquad \forall \xi \in K, \forall \lambda > 0.$$

Se K è un tale cono, chiameremo $\xi_o \circ K := \{\xi_o \circ \xi \mid \xi \in K\}$ *$\mathbb{G}$-cono con vertice in ξ_o.*

Sono ovviamente insiemi di tipo Cartan anche tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ che contengono *definitivamente* un $\mathbb{G}$-cono, i.e. gli insiemi F contenenti un $\mathbb{G}$-cono a meno di un d-disco $D(0,r)$. Utilizzando quest'ultimo criterio, è facile dimostrare che *ogni sottospazio di $\mathbb{R}^N$* è un insieme di tipo Cartan per $\Delta_{\mathbb{G}}$ (e qundi non sottile all'infinito per $\Delta_{\mathbb{G}}$).

5 Alcune applicazioni

Dai risultati presentati nei precedenti paragrafi si ottiene immediatamente la proposizione seguente che generalizza ed estende ai sub-Laplaciani il Principio del Massimo richiamato nell'Introduzione.

Teorema 5.1 *Sia u una funzione limitata superiormente e di classe C^2 in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che*

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{G}} u + c\,u \geq 0 & \text{in } \Omega\,; \\ \limsup_{y\to x} u(y) \leq 0 & \text{per ogni } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

ove $c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \leq 0$. Allora, se $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ non è sottile all'infinito per $\Delta_{\mathbb{G}}$, $u \leq 0$ in Ω. In particolare, questa conclusione è valida se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

(i) $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ *contiene un* $\mathbb{G}$*-cono;*

(ii) Ω *è contenuto in un semispazio.*

Dimostrazione. Basta applicare i risultati precedenti, dopo aver osservato che la funzione $v := \max\{u, 0\}$ è $\Delta_{\mathbb{G}}$-subarmonica in Ω. □

L'affermazione (ii) di questo teorema, nel caso particolare del sub-Laplaciano sul gruppo di Heisenberg (i.e. il Laplaciano di Kohn), è stata dimostrata da Birindelli e Prajapat.

Il precedente Principio del Massimo, insieme col metodo dello scivolamento di Berestycki e Nirenberg, esteso ai sub-Laplaciani da Birindelli e Prajapat, consente di ottenere risultati di simmetria e di monotonia per le soluzioni dell'equazione semilineare

$$\Delta_{\mathbb{G}} u + f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,$$

sotto opportune condizioni su f. Rinviamo a [BHM] e a [BP 3] per alcuni recenti e notevoli risultati nei casi del Laplaciano classico e del Laplaciano di Kohn, rispettivamente.

Vogliamo sottilineare che risultati di simmetria per le soluzioni di equazioni semilineari sui gruppi omogenei, hanno interesse in alcune formalizzazioni matematiche della teoria dei materiali cristallini.

Riferimenti bibliografici

[BCN] H. Berestycki, L. Caffarelli, L. Nirenberg, *Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), 1089–1111.

[BHM] H. Berestycki, F. Hamel, R. Monneau, *One-dimensional symmetry of bounded entire solutions of some elliptic equations*, Duke Math. J. **103** No.3 (2000), 375-396.

[BN] H. Berestycki, L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*. Bol. Soc. Braseleira Mat. **22** (1991), 1–37.

[BL 1] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, *Potential Theory on Carnot Groups*, preprint.

[BL 2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, *Maximum Principle on Unbounded Domains for Sub-Laplacian: a Potential Theory Approach*, preprint.

[BP 1] I. Birindelli, J. Prajapat, *Nonlinear Liouville Therems in the Heisenberg Group via the Moving Plane Method*, Comm. Partial: Differential Equations, **24** (19999), 1875–1890.

[BP 2] I. Birindelli, J. Prajapat, *Monotonicity and Symmetry results for Degenerate Elliptic Equations on Nilpotent Stratified Groups*, Pacific J. of Math., to appear.

[BP 3] I. Birindelli, J. Prajapat, *One dimensional symmetry in the Heisenberg group*, preprint.

[CC] C. Constantinescu, A. Cornea, *Potential theory on harmonic spaces*, Springer-Verlag, Berlin, (1972).

[D] J. Deny, *Un thèoreme sur les ensembles effilès*, Annales Univ. Grenoble, Sect. sci. Math. Phys. **23** (1948), 139–142.

[G] L. Gallardo, *Capacités, Mouvement Brownien et Problme de l'Épine de Lebesgue sur les Groupes de Lie Nilpotents*, Proc. VII Oberwolfach Conference on Probability measures on groups, Lectures Notes in Math., 1981.

[GNN] B. Gidas, Ni, W.M.,J. Nirenberg, *Symmetry oand related properties via the maximum principle*,Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243..

[HK] W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Sub-Harmonic Functions, Volume I*, Academic Press, London (1976).

[S] J. Serrin, *A symmetry theorem in potential theory*, Arch.Rational Mech.Anal. **43** (1971), 375-396